

## Métodos Matemáticos II Grao en Física.

### 4.- Aplicacións Lineais.

#### 4.1.- Definición.

Sexan  $\mathbb{V}$  e  $\mathbb{W}$  espazos vectoriais sobre o mesmo corpo  $\mathbb{K}$ .

Unha aplicación  $f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  dise que é unha aplicación lineal entre os espazos vectoriais  $\mathbb{V}$  e  $\mathbb{W}$  se verifica:

i)  $f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2), \forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ .

ii)  $f(\alpha v) = \alpha f(v), \forall v \in \mathbb{V}, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ .

#### 4.2. - Exemplos:

1. A aplicación  $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por  $f(x, y) = (x + 2y, 3x - y, 2x)$  é lineal
2. A aplicación  $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por  $f(x, y) = (x^2 + 2y, 3x - y, 2x)$  non é lineal.
3. A aplicación  $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $f(x, y, z) = (x + y, 3z - 2)$  non é lineal.
4. A aplicación  $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $f(x, y, z) = (x + y, 3xz)$  non é lineal.

#### 4.3.- Proposición (Propiedades básicas).

Se  $f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  é unha aplicación lineal, entón:

i)  $f(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$ .

ii)  $f(-v) = -f(v), \forall v \in \mathbb{V}$ .

iii) Se  $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ , entón  
$$f(v) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_n f(v_n)$$

#### Demostración.

i) Basta recordar que  $0_{\mathbb{K}} \circ v = 0_{\mathbb{V}}$ , e polo tanto

$$f(0_{\mathbb{V}}) = f(0_{\mathbb{K}} \circ v) = 0_{\mathbb{K}} \circ f(v) = 0_{\mathbb{W}}.$$

ii) Basta ter en conta que  $-v = (-1)v$ , e polo tanto

$$f(-v) = f((-1)v) = (-1)f(v) = -f(v).$$

iii) Podemos probalo por “recorrecia”

$$f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = f(\alpha_1 v_1) + f(\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) =$$

$$= f(\alpha_1 v_1) + f(\alpha_2 v_2) + \dots + f(\alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_n f(v_n).$$

#### 4.4.- Definición.

a) Unha aplicación lineal inyectiva chámase monomorfismo.

b) Unha aplicación lineal sobrexectiva chámase epimorfismo.

c) Unha aplicación lineal bixectiva chámase isomorfismo.

d) Unha aplicación lineal  $f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$  dun espazo en si mesmo chámase endomorfismo.

e) Un endomorfismo bixectivo chámase automorfismo.

#### 4.5.- Proposición.

Se  $\mathbb{V}$  e  $\mathbb{W}$  son dous espazos vectoriais sobre un corpo  $\mathbb{K}$ , entón unha aplicación lineal  $f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  está completamente determinada si se coñecen as imaxes dos vectores dunha base calquera  $B = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  de  $\mathbb{V}$ .

#### Demostración.-

Se coñecemos as imaxes  $f(E_1), f(E_2), \dots, f(E_m)$ , entón

$$\forall v \in \mathbb{V}, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K} / v = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_m E_m$$

e

$$f(v) = f(\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_m E_m) = \lambda_1 f(E_1) + \lambda_2 f(E_2) + \dots + \lambda_m f(E_m)$$

#### 4.6.- Exemplo.

Sexa  $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$  unha base de  $\mathbb{R}^3$  e  $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicación lineal dada por  $f(1, 1, 0) = (5, 3)$ ,  $f(1, 0, 1) = (3, 2)$  e  $f(0, 1, 1) = (2, 2)$ .

Calcula  $f(7, 1, 2)$ ,  $f(4, 9, 5)$  e  $f(a, b, c)$  para un vector arbitrario  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

#### Solución.-

Para calcular as coordenadas de  $(7, 1, 2)$  respecto de  $B$ , resolvemos o sistema

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e obtemos } \alpha = 3, \beta = 4, \gamma = -2.$$

En consecuencia

$$f(7, 1, 2) = f(3(1, 1, 0) + 4(1, 0, 1) - 2(0, 1, 1)) = 3(5, 3) + 4(3, 2) - 2(2, 2) = (23, 13).$$

Para calcular as coordenadas de  $(4, 9, 5)$  respecto de  $B$ , resolvemos o sistema

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ e obtemos } \alpha = 4, \beta = 0, \gamma = 5.$$

En consecuencia

$$f(4, 9, 5) = f(4(1, 1, 0) + 0(1, 0, 1) + 5(0, 1, 1)) = 4(5, 3) + 0(3, 2) + 5(2, 2) = (30, 22).$$

Para calcular as coordenadas de  $(a, b, c)$  respecto de  $B$ , resolvemos o sistema

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Utilizando o método de Gauss, dado que  $B$  é unha base, podemos obter as coordenadas para cada vector  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & -a + b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)F_2, F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & a - b \\ 0 & 0 & 2 & -a + b + c \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/2)F_3}$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{(1/2)F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & (-a+b+c)/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & (a-b+c)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (-a+b+c)/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \\
& \xrightarrow{F_1-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (a+b-c)/2 \\ 0 & 1 & 0 & (a-b+c)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (-a+b+c)/2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En consecuencia obtemos

$$\alpha = (a + b - c)/2, \quad \beta = (a - b + c)/2, \quad \gamma = (-a + b + c)/2.$$

$$\begin{aligned}
f(a, b, c) &= f\left(\frac{(a+b-c)}{2}(1, 1, 0) + \frac{(a-b+c)}{2}(1, 0, 1) + \frac{(-a+b+c)}{2}(0, 1, 1)\right) \\
&= \frac{(a+b-c)}{2}(5, 3) + \frac{(a-b+c)}{2}(3, 2) + \frac{(-a+b+c)}{2}(2, 2) = \\
&= \left(\frac{6a+4b}{2}, \frac{3a+3b+c}{2}\right).
\end{aligned}$$

#### 4.7.- Exercício

Sexa  $B = \{(2, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$  unha base de  $\mathbb{R}^3$  e  $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicación lineal dada por  $f(2, 1, 0) = (4, 3)$ ,  $f(1, 0, 1) = (3, 4)$  e  $f(1, 1, 1) = (2, 2)$ .

Calcula  $f(7, 5, 5)$ ,  $f(9, 4, 3)$  e  $f(a, b, c)$  para un vector arbitrario  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

#### 4.8.- Nota.

Se  $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é unha aplicación lineal, entón

existen  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$  con

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$$

En efecto, sexa  $e_j$  o vector da base canónica de  $\mathbb{R}^m$  con 1 no coeficiente  $j$  e 0 nos

restantes e  $f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ . Entón

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} &= f(x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}) = x_1 f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_m f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### 4.9.- Definición.

Se  $f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  é unha aplicación lineal, entón denomínase núcleo de  $f$  e denótase  $\text{Ker}(f)$  ou  $\text{Nuc}(f)$  ó conxunto:

$$\text{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{V} / f(x) = 0_{\mathbb{W}}\}$$

#### 4.10.- Proposición

Se  $f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  é unha aplicación lineal, entón

- i)  $\text{Ker}(f)$  é subespazo de  $\mathbb{V}$ .
- ii) Se  $\mathbb{U}$  é subespazo de  $\mathbb{V}$ ,  $f(\mathbb{U})$  é subespazo de  $\mathbb{W}$ .
- iii) Se  $\mathbb{U}$  é subespazo de  $\mathbb{W}$ ,  $f^{-1}(\mathbb{U})$  é subespazo de  $\mathbb{V}$ .
- iv)  $\text{Im}(f)$  é subespazo de  $\mathbb{W}$ .

Ademais  $\{f(E_1), f(E_2), \dots, f(E_m)\}$  é un conxunto de xeradores de  $\text{Im}(f)$ .

### **Demostración.**

i) Se  $v_1, v_2 \in \text{Ker}(f)$ , entón  $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0$ , polo que

$(v_1 + v_2) \in \text{Ker}(f)$ .

Se  $v \in \text{Ker}(f)$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ , entón  $f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha 0 = 0$ , polo que  $\alpha v \in \text{Ker}(f)$ .

ii)  $w_1, w_2 \in f(\mathbb{U}) \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in \mathbb{U} / f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2 \Rightarrow w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \in f(\mathbb{U})$  polo que  $w_1 + w_2 \in f(\mathbb{U})$ .

Se  $w \in f(\mathbb{U})$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ , entón  $\exists v \in \mathbb{U} / w = f(v) \Rightarrow \alpha w = \alpha f(v) = f(\alpha v) \in f(\mathbb{U})$  xa que  $\alpha v \in \mathbb{U}$  porque  $v \in \mathbb{U}$ . Logo  $w \in f(\mathbb{U})$ ,  $\alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha w \in f(\mathbb{U})$ .

iii) Se  $v_1, v_2 \in f^{-1}(\mathbb{W})$ , entón  $f(v_1), f(v_2) \in \mathbb{W}$  e  $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \in \mathbb{W}$  polo que  $(v_1 + v_2) \in f^{-1}(\mathbb{W})$ .

Se  $v \in f^{-1}(\mathbb{W})$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ , entón  $f(v) \in \mathbb{W}$  e  $f(\alpha v) = \alpha f(v) \in \mathbb{W}$  polo que  $\alpha v \in f^{-1}(\mathbb{W})$ .

iv) Basta ter en conta o apartado ii) para o caso de  $U = V$ .

Ademáis:

$$w \in \text{Im}(f) \Rightarrow \exists v \in V / f(v) = w \Rightarrow v = \sum_{i=1}^m \alpha_i E_i, w = f\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i E_i\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f(E_i).$$

### **4.11.- Corolario.**

Se  $f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  é unha aplicación lineal e  $B = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  é unha base de  $\mathbb{V}$ , entón  $f$  é sobrexectiva (epimorfismo)  $\Leftrightarrow W = \langle \{f(E_1), f(E_2), \dots, f(E_m)\} \rangle$ .

### **4.12.- Proposición.**

Sexa  $f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  é unha aplicación lineal, entón:

a)  $f$  es inxectiva  $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0_{\mathbb{V}}\}$ .

b)  $f$  é sobrexectiva  $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{W}$ .

### **Demostración:**

a) “ $\Rightarrow$ ” é evidente.

Demostremos a outra implicación “ $\Leftarrow$ ”:

$$\begin{aligned}v_1, v_2 \in \mathbb{V}, f(v_1) = f(v_2) &\Rightarrow f(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow (v_1 - v_2) \in \text{Ker}(f) = \{0\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2\end{aligned}$$

c) É a definición.

#### 4.13.- Proposición.

Se  $f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  é unha aplicación lineal e bixectiva, entón a aplicación bixectiva

$f^{-1}: \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V}$  é unha aplicación lineal.

**Demostración:** Temos que probar que a aplicación bixectiva  $f^{-1}: \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V}$

Verifica as seguintes propiedades:

a) se  $u, w \in \mathbb{W}$ , entón  $f^{-1}(u + w) = f^{-1}(u) + f^{-1}(w)$ ;

b) se  $u \in \mathbb{W}$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ , entón  $f^{-1}(\alpha u) = \alpha f^{-1}(u)$ .

En efecto, sexan  $u, w \in \mathbb{W}$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $x = f^{-1}(u)$ ,  $y = f^{-1}(w)$  [é dicir  $f(x) = u$ ,  $f(y) = w$ ].

a)  $f^{-1}(u + w) = f^{-1}(f(x) + f(y)) = f^{-1}(f(x + y)) = x + y = f^{-1}(u) + f^{-1}(w)$ .

b)  $f^{-1}(\alpha u) = f^{-1}(\alpha f(x)) = f^{-1}(f(\alpha x)) = \alpha x = \alpha f^{-1}(u)$ .

**Observación:** Se unha aplicación  $f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  entre espazos vectoriais é un isomorfismo entón  $f^{-1}: \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V}$  é tamén un isomorfismo.

#### 4.14.- Definición.

Dous espazos vectoriais  $V, W$  dise que son isomorfos se existe un isomorfismo entre eles e escríbese  $V \cong W$ .

#### 4.15.- Exemplo.

Se  $V$  é un  $\mathbb{K}$ -espazo vectorial de dimensión  $n$ , entón  $V \cong \mathbb{K}^n$ .

Se  $B = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ , a aplicación  $f: V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ , dada por  $f\left(\sum_{i=1}^n a_i E_i\right) = (a_1, \dots, a_n)$  é un

isomorfismo.

#### 4.16.- Proposición.

Se  $f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  é unha aplicación lineal, entón:

$$\dim \mathbb{V} = \dim (\text{Ker}(f)) + \dim (\text{Im}(f)).$$

#### Demostración.

Sexa  $\dim \mathbb{V} = n$  e  $\dim (\text{Ker}(f)) = r$ .

Collemos unha base de  $\text{Ker}(f)$ ,  $\{E_1, E_2, \dots, E_r\}$ , e completámola a unha base de  $\mathbb{V}$ ,

$\{E_1, E_2, \dots, E_r, E_{r+1}, \dots, E_n\}$ .

Pola forma en que eliximos a base de  $\mathbb{V}$ , temos que  $f(E_1) = \dots = f(E_r) = 0$  e polo tanto  $\{f(E_{r+1}), \dots, f(E_n)\}$  é un conxunto de xeradores de  $\text{Im}(f)$ .

Ademais  $\{f(E_{r+1}), \dots, f(E_n)\}$  é un conxunto de vectores linealmente independentes pois

$$\sum_{i=r+1}^n \alpha_i f(E_i) = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{i=r+1}^n \alpha_i E_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=r+1}^n \alpha_i E_i \in \text{Ker}(f).$$

Pero dado que un vector do núcleo pode expresarse como combinación lineal dos  $r$  primeiros vectores da base  $\{E_1, E_2, \dots, E_r, E_{r+1}, \dots, E_n\}$ , e que un vector só pode expresarse dunha única forma como combinación lineal dos vectores dunha base (véxase o Corolario 6.5.6 do capítulo de Espazos Vectoriais), temos que a única posibilidade é que  $\alpha_i = 0$ ,  $i = r+1, \dots, n$ , e polo tanto  $\{f(E_{r+1}), \dots, f(E_n)\}$  forman unha base de  $\text{Im}(f)$ .

#### 4.17.- Proposición.

Se  $f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  é unha aplicación lineal, entón:

- 1)  $f$  é inxectiva se, e só se, para calquera conxunto  $\{E_1, \dots, E_r\}$  de vectores de  $\mathbb{V}$  linealmente independentes o conxunto  $\{f(E_1), \dots, f(E_r)\}$  é linealmente independente.
- 2)  $f$  é sobrexectiva se, e só se, para calquera conxunto  $\{E_1, \dots, E_r\}$  de xeradores de  $\mathbb{V}$  o conxunto  $\{f(E_1), \dots, f(E_r)\}$  é un conxunto de xeradores de  $\mathbb{W}$ .

**En efecto:**

- 1) “ $\Rightarrow$ ”

Sexa  $\dim \mathbb{V} = n$ . Como  $f$  é inxectiva  $\dim \text{Ker } f = 0$  e  $\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{V} = n$ .

Se  $\{E_1, \dots, E_r\}$  é un conxunto de vectores de  $V$  linealmente independentes, pode completarse a unha base de  $V$   $\{E_1, \dots, E_r, E_{r+1}, \dots, E_n\}$  e

$\text{Im } f = \langle \{f(E_1), \dots, f(E_r), f(E_{r+1}), \dots, f(E_n)\} \rangle$ .

Pero como  $\dim \text{Im } f = n$ ,  $\{f(E_1), \dots, f(E_r), f(E_{r+1}), \dots, f(E_n)\}$  son linealmente independentes e polo tanto  $\{f(E_1), \dots, f(E_r)\}$  son linealmente independentes.

“ $\Leftarrow$ ”

Se  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é unha base de  $V$ , entón é un conxunto de vectores de  $V$  linealmente independentes e polo tanto  $\{f(E_1), \dots, f(E_n)\}$  é un conxunto de vectores de  $W$  linealmente independentes e como ademais é un conxunto de xeradores de  $\text{Im } f$ ,  $\{f(E_1), \dots, f(E_n)\}$  é unha base de  $\text{Im } f$ .

Así  $\dim V = \dim \text{Im } f$ , polo tanto  $\dim \text{Ker } f = 0$  e  $f$  é inxectiva.

2) “ $\Rightarrow$ ”

Se  $\{E_1, \dots, E_r\}$  é un conxunto de xeradores de  $V$ , é claro que  $\{f(E_1), \dots, f(E_r)\}$  é un conxunto de xeradores de  $\text{Im } f$ . Entón se  $f$  é sobrexectiva  $\text{Im } f = W$  e  $\{f(E_1), \dots, f(E_r)\}$  é un conxunto de xeradores de  $W$ .

“ $\Leftarrow$ ”

Se  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é unha base de  $V$ , entón é un conxunto de xeradores de  $V$  e polo tanto  $\{f(E_1), \dots, f(E_n)\}$  é un conxunto de xeradores de  $W$ .

Pero se  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é unha base de  $V$ , entón  $\text{Im } f = \langle \{f(E_1), \dots, f(E_n)\} \rangle$ .

Pero entón  $W = \text{Im } f$  e  $f$  é sobrexectiva.

#### 4.18.- Teorema (Teorema de clasificación).

Sexan  $\mathbb{V}$  e  $\mathbb{W}$  espazos vectoriais sobre o mesmo corpo  $K$ . Entón  $\mathbb{V}$  é isomorfo a  $\mathbb{W}$  se, e só se,  $\dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{W}$ .

#### Demostración.

“ $\Rightarrow$ ” Se  $f: V \rightarrow W$  é un isomorfismo, entón  $\text{Im } f = W$ ,  $\text{Ker } f = \{0\}$  e polo tanto  $\dim(\text{Im } f) = \dim W$  e  $\dim(\text{Ker } f) = 0$ . En consecuencia

$$\dim V = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = 0 + \dim W.$$

“ $\Leftarrow$ ”

Sexan  $B = \{E_1, \dots, E_n\}$  e  $B' = \{F_1, \dots, F_n\}$  bases de  $V$  e  $W$ , respectivamente.

A aplicación lineal definida como  $f(E_1) = F_1, \dots, f(E_n) = F_n$  é un isomorfismo pois

$\text{Im}f = \langle \{f(E_1), \dots, f(E_n)\} \rangle = \langle \{F_1, \dots, F_n\} \rangle = W$  e polo tanto  $f$  é sobrexectiva.

Ademáis

$$\dim V = \dim(\text{Ker}f) + \dim(\text{Im}f) = \dim(\text{Ker}f) + \dim W$$

e polo tanto  $f$  é inxectiva pois  $\text{Ker}f = \{0\}$ , xa que  $\dim V = \dim W$ .

#### 4.19.- Definición.

Se  $f: V \longrightarrow W$  é unha aplicación lineal, entón denomínase rango da aplicación lineal a dimensión da imaxe:

$$\text{rang}(f) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f)) = \dim_{\mathbb{K}}(f(V))$$

#### 4.20.- Proposición.

Sexa  $f: V \longrightarrow W$  unha aplicación lineal.

$B = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  base de  $V$  e  $B' = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  base de  $W$

Entón:

$$\begin{pmatrix} \text{coord.} & \text{coord.} & \dots & \dots & \text{coord.} \\ \text{de } f(E_1) & \text{de } f(E_2) & \dots & \dots & \text{de } f(E_m) \\ \text{respecto} & \text{respecto} & \dots & \dots & \text{respecto} \\ \text{de } B' & \text{de } B' & \dots & \dots & \text{de } B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } v \\ \text{respecto} \\ \text{de } B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } f(v) \\ \text{respecto} \\ \text{de } B' \end{pmatrix}$$

#### Demostración.-

Se  $v = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_m E_m$ , entón

$f(v) = f(\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_m E_m) = \lambda_1 f(E_1) + \lambda_2 f(E_2) + \dots + \lambda_m f(E_m)$  e

$$\begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } f(v) \\ \text{respecto} \\ \text{de } B' \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } f(E_1) \\ \text{respecto} \\ \text{de } B' \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } f(E_2) \\ \text{respecto} \\ \text{de } B' \end{pmatrix} + \dots + \lambda_m \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } f(E_m) \\ \text{respecto} \\ \text{de } B' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{coord.} & \text{coord.} & \dots & \dots & \text{coord.} \\ \text{de } f(E_1) & \text{de } f(E_2) & \dots & \dots & \text{de } f(E_m) \\ \text{respecto} & \text{respecto} & \dots & \dots & \text{respecto} \\ \text{de } B' & \text{de } B' & \dots & \dots & \text{de } B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } v \\ \text{respecto} \\ \text{de } B \end{pmatrix}$$

**É dicir:**

$$\text{Sexa } f(E_i) = \alpha_{1i}F_1 + \alpha_{2i}F_2 + \dots + \alpha_{ni}F_n$$

$$\begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } f(E_i) \\ \text{respecto} \\ \text{de } B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \dots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}$$

Se  $v = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_m E_m$ , entón

$$f(v) = f(\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_m E_m) = \lambda_1 f(E_1) + \lambda_2 f(E_2) + \dots + \lambda_m f(E_m) =$$

$$= \lambda_1(\alpha_{11}F_1 + \alpha_{21}F_2 + \dots + \alpha_{n1}F_n) + \dots + \lambda_m(\alpha_{1m}F_1 + \alpha_{2m}F_2 + \dots + \alpha_{nm}F_n)$$

$$\begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } f(v) \\ \text{respecto} \\ \text{de } B' \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \dots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_m \begin{pmatrix} \alpha_{1m} \\ \alpha_{2m} \\ \dots \\ \alpha_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

#### 4.21.- Exemplo.

Sexa  $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$  unha base de  $\mathbb{R}^3$  e  $B' = \{(1, 1), (2, 1)\}$  unha base de  $\mathbb{R}^2$ .

Se  $(x_1, x_2, x_3)$  son as coordenadas de  $v$  respecto de  $B$ , escribiremos  $v = (x_1, x_2, x_3)_B$ .

Se  $(x_1, x_2)$  son as coordenadas de  $w$  respecto de  $B'$ , escribiremos  $w = (x_1, x_2)_{B'}$ .

Sexa  $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicación lineal dada por

$$f(1, 1, 0) = (1, 2)_{B'}; f(1, 0, 1) = (1, 1)_{B'}; f(0, 1, 1) = (2, 0)_{B'};$$

Calcula  $f(7, 1, 2)$ ,  $f(4, 9, 5)$  e  $f(a, b, c)$  para un vector arbitrario  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

**Solución.-**

Sabemos que

$$\begin{pmatrix} \text{coord.} & \text{coord.} & \text{coord.} \\ \text{de } f(E_1) & \text{de } f(E_2) & \text{de } f(E_3) \\ \text{respecto} & \text{respecto} & \text{respecto} \\ \text{de } B' & \text{de } B' & \text{de } B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para un vector  $v$ , sabemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } v \\ \text{respecto} \\ \text{de } B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } f(v) \\ \text{respecto} \\ \text{de } B' \end{pmatrix}$$

Do exemplo 4, sabemos que as coordenadas de  $(7, 1, 2)$  respecto de  $B$  son

$$(7, 1, 2) = (3, 4, -2)_B$$

En consecuencia

$$\begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } f(7, 1, 2) \\ \text{respecto} \\ \text{de } B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

É dicir  $f(7, 1, 2) = (3, 10)_{B'}$ , e polo tanto  $f(7, 1, 2) = 3(1, 1) + 10(2, 1) = (23, 13)$

De novo do exemplo 4, sabemos que as coordenadas de  $(4, 9, 5)$  respecto de  $B$  son

$$(4, 9, 5) = (4, 0, 5)_B$$

En consecuencia

$$\begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } f(4, 9, 5) \\ \text{respecto} \\ \text{de } B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$$

É dicir  $f(4, 9, 5) = (14, 8)_{B'}$ , e polo tanto  $f(4, 9, 5) = 14(1, 1) + 8(2, 1) = (30, 22)$

De novo do exemplo 4, sabemos que as coordenadas de  $(a, b, c)$  respecto de  $B$  son

$$(a, b, c) = ((a + b - c)/2, (a - b + c)/2, (-a + b + c)/2)_B$$

En consecuencia

$$\begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } f(a, b, c) \\ \text{respecto} \\ \text{de } B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a+b-c)/2 \\ (a-b+c)/2 \\ (-a+b+c)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c \\ (3a+b-c)/2 \end{pmatrix}$$

É dicir

$f(a, b, c) = (b+c, (3a+b-c)/2)_{B'}$ , e polo tanto

$f(a, b, c) = (b+c)(1, 1) + ((3a+b-c)/2)(2, 1) = (3a+2b, (3a+3b+c)/2)$ .

#### 4.22.- Proposición.

Se  $f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  é unha aplicación lineal e

$B = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  é unha base de  $\mathbb{V}$  e  $B' = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  unha base de  $\mathbb{W}$ .

Se  $M \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$  é unha matriz tal que

$$M \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } v \\ \text{respecto} \\ \text{de } B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } f(v) \\ \text{respecto} \\ \text{de } B' \end{pmatrix}$$

Entón

$$M = \begin{pmatrix} \text{coord.} & \text{coord.} & \dots & \dots & \text{coord.} \\ \text{de } f(E_1) & \text{de } f(E_2) & \dots & \dots & \text{de } f(E_m) \\ \text{respecto} & \text{respecto} & \dots & \dots & \text{respecto} \\ \text{de } B' & \text{de } B' & \dots & \dots & \text{de } B' \end{pmatrix}$$

#### Demostración.

$$\begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } E_i \\ \text{respecto} \\ \text{de } B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vector con todos os elementos 0 excepto un 1 no lugar } i. \text{ Entón}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Columna} \\ i \\ \text{de} \\ M \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } E_i \\ \text{respecto} \\ \text{de } B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coord.} \\ \text{de } f(E_i) \\ \text{respecto} \\ \text{de } B' \end{pmatrix}$$

#### 4.23.- Definición.

Sexa  $f : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  unha aplicación lineal.

$B = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  base de  $\mathbb{V}$  e  $B' = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  base de  $\mathbb{W}$

Chámase **matriz asociada** a  $f$ , respecto das bases  $B$  e  $B'$ , á matriz

$$(f_{BB'}) = \begin{pmatrix} \text{coord.} & \text{coord.} & \dots & \dots & \text{coord.} \\ \text{de } f(E_1) & \text{de } f(E_2) & \dots & \dots & \text{de } f(E_m) \\ \text{respecto} & \text{respecto} & \dots & \dots & \text{respecto} \\ \text{de } B' & \text{de } B' & \dots & \dots & \text{de } B' \end{pmatrix}$$

#### 4.24.- Exercício

Sexa  $B = \{(2, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$  unha base de  $\mathbb{R}^3$  e  $B' = \{(1, 1), (2, 1)\}$  unha base de  $\mathbb{R}^2$ .

Recordamos que

Se  $(x_1, x_2, x_3)$  son as coordenadas de  $v$  respecto de  $B$ , escribiremos  $v = (x_1, x_2, x_3)_B$

Se  $(x_1, x_2)$  son as coordenadas de  $w$  respecto de  $B'$ , escribiremos  $w = (x_1, x_2)_{B'}$ .

Sexa  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicación lineal dada por

$f(2, 1, 0) = (2, 1)_{B'}$ ,  $f(1, 0, 1) = (5, -1)_{B'}$  e  $f(1, 1, 1) = (2, 0)_{B'}$ .

Utiliza a matriz asociada a  $f$  segundo as bases  $B$  e  $B'$  para calcular  $f(7, 5, 5)$ ,  $f(9, 4, 3)$  e  $f(a, b, c)$  para un vector arbitrario  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

#### 4.25.- Proposición.

Se  $f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  e  $g: \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{U}$  son aplicacións lineais, entón  $g \circ f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{U}$  é unha aplicación lineal.

**Demostración:**

$$\text{i) } (g \circ f)(v_1+v_2) = (g(f(v_1+v_2))) = g(f(v_1)+f(v_2)) = g(f(v_1))+g(f(v_2)) = (g \circ f)(v_1)+(g \circ f)(v_2), \\ \forall v_1, v_2 \in \mathbb{V}$$

$$\text{ii) } (g \circ f)(\alpha v) = g(f(\alpha v)) = g(\alpha f(v)) = \alpha g(f(v)) = \alpha(g \circ f)(v), \forall v \in \mathbb{V}, \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

#### 4.26.- Proposición.

Sexan  $f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  e  $g: \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{U}$  aplicacións lineais e  $B, B'$  e  $B''$  bases de  $\mathbb{V}, \mathbb{W}$  e  $\mathbb{U}$  respectivamente. Entón

$$(g_{B'B''})(f_{BB'}) = ((g \circ f)_{BB''})$$

**Demostración:** É consecuencia inmediata da Proposición 7.22. xa que

$$(g_{B'B''})(f_{BB'}) \begin{pmatrix} \text{coord..} \\ \text{de} \\ E_i \\ \text{respecto} \\ \text{de } B \end{pmatrix} = (g_{B'B''}) \begin{pmatrix} \text{coord..} \\ \text{de} \\ f(E_i) \\ \text{respecto} \\ \text{de } B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coord..} \\ \text{de} \\ g(f(E_i)) \\ \text{respecto} \\ \text{de } B'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coord..} \\ \text{de} \\ (g \circ f)(E_i) \\ \text{respecto} \\ \text{de } B'' \end{pmatrix}.$$

#### 4.27.- Definición.

Se  $B$  e  $B'$  son dúas bases do mesmo espazo vectorial  $\mathbb{V}$ , chamamos **matriz de cambio de base** de  $B$  a  $B'$  á matriz asociada á aplicación identidade  $I: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$  respecto das bases  $B$  e  $B'$ , denotase  $(I_{BB'})$ .

É claro que si  $B = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  e  $B' = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  son base de  $\mathbb{V}$ , entón

$$(I_{BB'}) = \begin{pmatrix} \text{coord.} & \text{coord.} & \dots & \dots & \text{coord.} \\ \text{de } E_1 & \text{de } E_2 & \dots & \dots & \text{de } E_n \\ \text{respecto} & \text{respecto} & \dots & \dots & \text{respecto} \\ \text{de } B & \text{de } B' & \dots & \dots & \text{de } B' \end{pmatrix}$$

e que

$$\begin{pmatrix} \text{coord..} & \text{coord..} & \dots & \text{coord..} \\ \text{de } E_1 & \text{de } E_2 & \dots & \text{de } E_n \\ \text{respecto} & \text{respecto} & \dots & \text{respecto} \\ \text{de } B' & \text{de } B' & \dots & \text{de } B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{coord..} \\ \text{de } v \\ \text{respecto} \\ \text{de } B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coord..} \\ \text{de } v \\ \text{respecto} \\ \text{de } B' \end{pmatrix}$$

**4.28.- Nota.**

É claro que se  $B$  é unha base dun espazo vectorial  $\mathbb{V}$  e consideramos  $I: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$  entón  $(I_{BB}) = I$  (sendo  $I$  a matriz identidade).

**4.29.- Nota.**

Se  $B$  e  $B'$  son dúas bases do mesmo espazo vectorial  $\mathbb{V}$ , entón, en virtude da Proposición 7.26 temos que

$$(I_{BB'}) \circ (I_{B'B}) = (I_{B'B'}) = I$$

$$(I_{B'B}) \circ (I_{BB'}) = (I_{BB}) = I$$

e en consecuencia  $(I_{BB'}) = (I_{B'B})^{-1}$

**4.30.- Proposición** (matrices asociadas a unha aplicación lineal respecto a bases distintas).

Se  $f: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$  é unha aplicación lineal,  $B_1$  e  $B_2$  bases de  $\mathbb{V}$  e  $B'_1$  e  $B'_2$  bases de  $\mathbb{W}$ , entón:

$$(I_{B'_1 B'_2})(f_{B_1 B_1})(I_{B_2 B_1}) = (f_{B_2 B_2})$$

**Demostración.-**

É consecuencia directa das proposicións anteriores tendo en conta que a composición  $I_{\mathbb{W}} \circ f \circ I_{\mathbb{V}}$  coincide con  $f$  ( $I_{\mathbb{W}} \circ f = f \circ I_{\mathbb{V}} = I_{\mathbb{W}} \circ f \circ I_{\mathbb{V}} = f$ ).